题解

题解 v -0.0

建议先行阅读此份口胡题解。

A. Co-Tree：由目标函数提到的两两距离和，可想到，在树上找个点，使得它到其它点距离和最小。

B. Math：考虑每秒开始时 “avin 拿着 Robot 在 i 点” 的状态 到 “Avin 拿着 Robot 在 i+1 点” 状态，需要时间的期望？一个状态自己转移到自己怎么办？

C. Trap：在互质这个限制条件，容斥！那么考虑没有互质的限制怎么做？枚举两条边，第三条边方案数怎么快速统计？

D. Wave：枚举两种不同的数，复杂度多少？

E. Packing：我们需要决策，能 DP 吗？能贪心吗？按什么优先级来决定发哪个缓冲区的货呢？

F. String：乘法原理。

G. Traffic：哪些等待时间不合法？

H. Rng：for，for 枚举右端点可以做啊！观察两个 for 的做法，变成一个 for 就 win 了。

I. Buget：最低位决定答案。

J. Worker：按比例分配。

K. Class：解方程。

题解 v +0.0

A. Co-Tree

题解

对于一棵树 T，定义 $f(u, T)$ 为 u 到 T 中其它点距离之和，我们可以用经典的两次 DFS 计算 $f(u, T)$，第一次计算 u 到 u 的子树内所有点距离和，第二次计算 u 到 u 的子树外所有点距离和。

设给出的两棵树分别为 T_1, T_2，设它们的大小为 $size_1, size_2$

- 在 T_1 找，$u_1 = argmin_{u \in T_1} f(u, T_1)$。

- 在 T_2 找，$u_2 = argmin_{u \in T_2} f(u, T_2)$。

连接 (u_1, u_2) 即为一组最优解。

证明：

我们只需最小化，两点分立于 T_1, T_2 的点对，对答案的贡献。

我们定义 $size(T)$ 为树 T 的节点个数。

一方面有

1. 连接的边，一定会被统计 $c_1 = size(T_1) * size(T_2)$ 次。
2. T_1 中的边，至少被统计 $c_2 = f(u_1, T_1) * size(T_2)$ 次。
3. T_2 中的边，至少被统计 $c_3 = f(u_2, T_2) * size(T_1)$ 次。

另一方面有，连接 u_1, u_2，贡献为 $c_1 + c_2 + c_3$

故 $c_1 + c_2 + c_3$ 同时是下界与上界。

bonus1 给 m 棵树，连 $m - 1$ 条边怎么做?

做法： 选出每棵树重心，把 size 最大的树的重心，和其它树的重心相连。

证明： 在 T_i 中找，$u_i = argmin_{u \in T_i} f(u, T_i)$,同样地，我们考虑分立与不同树的点对，对答案的贡献。

一方面，考虑 T_i 中的边，对答案的贡献的下界为$f(u_i, T_i)(n - size(T_i))$。

另一方面，考虑连接用的 $m-1$ 条边，我们先把 T_i 缩成一个权值为 $size(T_i)$ 点 T_i'，设 size 最大的树为 T_{rt}，对于 $i \neq k$的点 T_i'，其子树内点权和 sum 的取值范围在 $[size(T_i), n - size(T_{rt})]$ 内，T_i' 连向其父亲的边对答案的贡献为 $sum(n - sum)$，根据二次函数的性质以及 $size(T_i) \leq size(T_{rt})$，我们有 $sum = size(T_i)$ 时，贡献最小。

bonus2 给出 n 个正整数，每次操作可以拿出两数字 a, b，再把 $a + b$ 塞回去，得分为 $a * b$，求最大得分？最小得分？【wls 口胡出来的问题】

B. Math

题解

图上随机游走的模型！

用 $g(i)$ 表示 “avin 拿着 Robot 在 i 点” 的状态 到 “Avin 拿着 Robot 在 i+1 点” 状态，需要时间的期望。

于是有 $g(i) = (1-p) + p[g(i) + 2((1-q)^{l-i}(l-i) + \sum_{x=0}^{l-i-1} q(1-q)^x x)]$，上式中 x 枚举了装备爆了后，走了多少步才发现自己装备被爆。

把等式右边的 $g(i)$ 扔左边去，前缀和预处理 $\sum_{x=0}^{l-i-1} q(1-q)^x x$，可以 $O(1)$ 计算 $g(i)$，对 $\sum_{i=0}^{l-1} g(i)$ 即为所求。

bonus $l \le 10^9$ 怎么做?

C. Trap

题解

令 $f(d)$ 表示，有多少种等腰梯形，四条边边长都是 d 的倍数。

枚举 d，根据容斥原理，有 $ans = \sum_{d=1}^{maxlen} f(d)\mu(d)$，$maxlen$ 表示给出的边中，最长的长度。

考虑 $f(d)$ 的求解，我们先取出长度为 d 的倍数的边，统计每种边出现的次数，按边的长度排序，枚举腰的长度和顶边的长度，双指针统计有多少种底边合法。

bonus

要求选出的腰，顶，底，三种边长，两两互质怎么做?

D. Wave

题解

枚举两种颜色，设第 i 种颜色出现 $cnt[i]$ 次，因为
$\sum_{i=1}^{c} \sum_{j=1}^{c}(cnt[i] + cnt[j]) = c(\sum_{i=1}^{c} cnt[i] + \sum_{j=1}^{c} cnt[j])$

因此复杂度为 $O(nc)$

E. Packing

题解

- 把所有货物发完需要的时间，是一个常数 C，假设 1~C 秒，Avin 挂机，此时损失为常量 S。
- 定义缓冲区爆炸为，缓冲区内货物数大于容量。
- 现在 Avin 不挂机了，开始行动了!
- 当前时间为 cur，如果缓冲区 i 爆炸，那么放逐掉这个缓冲区内的一个货物减少的损失为 $C - cur + 1$，否则减少的损失 $C - las + 1$，其中 las 为，如果Avin挂机，此缓冲区之后最早什么时候爆炸。
- 因此我们发现，放逐合法的 las 最小的缓冲区，最优。
- 用堆维护 las 最小的缓冲区。

F. String

题解

统计每种字符出现次数，由乘法原理可计算概率。

G. Traffic

题解

我们需要决定一个最小正整数 x，使得不存在有序对 (i,j) 使得 $b[i]+x=a[j](1\le i\le n, 1\le j\le m)$

枚举 $i,j((1\le i\le n, 1\le j\le m))$，那么 x 不能取 $a[j]-b[i]$，在可以 x 可以取的值中，取最小值即可。

bonus $n,m,a_i\le 200000$ 怎么做?

H. Rng

题解

设 $p(i)$ 表示，两区间交的右端点为 i 的概率。

根据概率的可加性，（即 $P(A+B)=P(A)+P(B)$），所求的答案等于 $\sum_{i=1}^{n} p(i)$

接下来考虑 $p(x)$, $(1\le x\le n)$ 该怎样计算。

设生成的两个区间分别为 $[l_1,r_1],[l_2,r_2]$

我们可以分成如下三种 Case，来计算 $p(x)$

1. $r_1=x,r_2=x$。概率为 $\frac{1}{x^2}$
2. $r_1=x,r_2>x,r_1\le x$。概率为 $\frac{1}{x}\sum_{i=x+1}^{n}\frac{x}{i}=\sum_{i=x+1}^{n}\frac{1}{i}$
3. $r_1>x,l_1\le x,r_2=x$。概率为 $\frac{1}{x}\sum_{i=x+1}^{n}\frac{x}{i}=\sum_{i=x+1}^{n}\frac{1}{i}$

维护 $\frac{1}{i}(1\le i\le l)$ 前缀和。

I. Worker

题解

各仓库分配人数的比例应为 $\frac{1}{a_1}:\frac{1}{a_2}:\ ....\ :\frac{1}{a_n}$

很可惜它们不是整数，我们令 $M=lcm(a_1,a_2,....,a_n)$(即 M 为 $a_1,a_2,...,a_n$) 最小公倍数。

各仓库分配人数的比例应为 $\frac{M}{a_1}:\frac{M}{a_2}:\ ....\ :\frac{M}{a_n}$

那么，不难解出，对于 $1\le i\le n$ 的每一个 i，第 i 个仓库需要。$m*\frac{\frac{M}{a_i}}{\sum_{i=1}^{n}\frac{M}{a_i}}$ 人。

这个解是具有唯一性的。因此，如果某个仓库需要的人数不是整数，那么无解。

bonus $a_i \leq 10^9$?

J. Budget

题解

考虑数字 x 对答案的贡献。设 x 小数点后第 3 位为 b

- 如果 $b \leq 4$，那么给答案加上 $-b * 10^{-3}$
- 如果 $b \geq 5$，那么给答案加上 $(10 - b) * 10^{-3}$

K. Class

题解

根据高斯消元解线性方程组(划掉)可得。

$a = \frac{x+y}{2}, b = \frac{x-y}{2}$

输出 $a * b$ 即可。